

3.3. Sile koje se izučavaju u mehanici

3.3.1. Gravitaciona sila

Prema Opštem zakonu gravitacije, dvije čestice masa m_1 i m_2 se međusobno privlače silom koja je proporcionalna proizvodu masa dvije čestice i obrnuto proporcionalna njihovoj udaljenosti. Opšti zakon gravitacije se može zapisati na slijedeći način

$$F_{12} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

gdje F_{12} sila kojom čestica 1 privlači česticu 2, m_1 i m_2 mase čestice, r udaljenost između čestica 1 i 2, te G univerzalna gravitaciona konstanta (UGK) koja iznosi $6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.



Slika 3.6. Mase m_1 i m_2 na udaljenosti r

Iako se G javlja u Njutnovom Opštem zakonu gravitacije, njegova vrijednost je izmjerena tek na prelazu iz 18 u 19 stoljeće. Kavendiš (*Henry Cavendish*) je mjereći gustoću Zemlje pomoću torzione vage izračunao prvu vrijednost konstante G sa dobrom preciznošću, te današnja mjerenja se od prve izmjerene vrijednosti ove konstante razlikuju u veoma malim procentima. Mjerenje ove konstante je otežano jer je gravitaciona sila znatno manja od ostalih fundamentalnih sila.

Opšti zakon gravitacije opisuje privlačnu silu između bilo koje dvije čestice. Ako su u pitanju dvije čestice malih masa, onda je i sila kojom se međusobno privlače te dvije čestice veoma mala. Da bi privlačna sila između dvije čestice imala značajnu i nezanemarivu vrijednost, makar jedna od masa koje se privlače mora biti iznimno velika. Kao najočitiji primjer su privlačne sile između nebeskih tijela (Sunce - Zemlja, Zemlja - Mjesec, ..). Ako se neki objekat nalazi na površinu Zemlje, Zemlja i taj objekat se međusobno privlače silom koja se naziva *sila Zemljine teže*, ili kraće *težina*.

Ta sila zavisi od mase Zemlje ($m_{\text{zemlje}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$) i UGK ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$) koje su konstantne. Također zavisi i od kvadrata udaljenosti središta masa, koja u ovom slučaju odgovara srednjem poluprečniku Zemlje ($r_{\text{zemlje}} = 6371 \text{ km}$). Iako udaljenost tijela na površini od središta Zemlje varira u zavisnosti od lokacije na površini Zemlje i nadmorske visine, te razlike u radijusu i konačnoj vrijednosti sile su zanemarive. Ako se ove tri konstantne veličine izvuku iz Opšteg zakona gravitacije, dobije se veličina koja se naziva gravitaciono ubrzanje

$$g = \frac{GM}{r^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Obzirom da udaljenost tijela na površini Zemlje se mijenja u zavisnosti od položaja i nadmorske visine, i vrijednost gravitacionog ubrzanja na površini Zemlje se mijenja u rasponu od $9,78$ - $9,82 \text{ m/s}^2$. Konvencijom je usvojeno da je za upotrebu u proračunima

klasične mehanike zadovoljavajuće rezultate daje gore navedena vrijednost gravitacionog ubrzanja. Sila Zemljine teže se sada može zapisati kao

$$W = mg$$

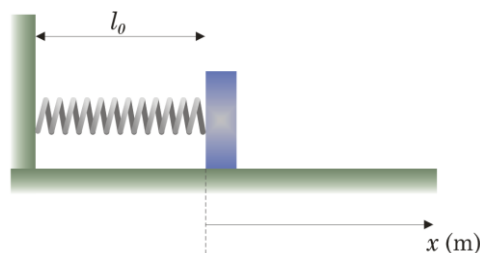
gdje se sa W označava sila Zemljine teže (težina), m masa tijela na površini Zemlje i g gravitaciono ubrzanje. Pravac vektora težine je uvijek okomit na površinu Zemlje i usmjeren je prema dole, što je najjednostavnije upamtiti smjerom padanja tijela puštenog iz stanja mirovanja sa bilo koje visine.

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

3.3.2. Elastične sile

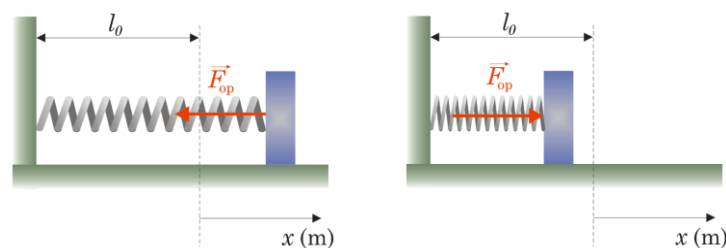
Ako je tijelo opterećeno nekom vanjskom silom, to tijelo se pod uticajem te sile deformiše. Nakon što vanjska sila prestane svoje djelovanje, tijelo se vrati u svoj prvobitni položaj. Ova deformacija tijela pod uticajem vanjske sile, nakon čijeg prestanka se tijelo vrati u prvobitni položaj, se naziva elastična deformacija.

Kao najočitiji primjer elastične deformacije je sabijanje opruge. Na slici je prikazana opruga jednim svojim krajem povezana za nepomičan zid, dok je drugim svojim krajem povezana sa blokom koji može da se kreće horizontalno.



Slika 3.7. Opruga u neopterećenom stanju

U prikazanom trenutku opruga nije istegnuta, odnosno ima svoju početnu neopterećenu dužinu. U takvom stanju ona ne stvara nikakvu silu. Ako se blok pomjeri ulijevo ili udesno za neku vrijednost, zbog nastale deformacije opruge nastaje sila u opruzi. Sila koja nastaje u opruzi pri njenom deformisanju stvara podjednake sile kako na blok, tako i na nepomični zid. Ako je trenutna dužina opruge veća od njene početne neopterećene dužine, opruga pokušava da približi blok nepomičnom zidu i da tako vrati svoju neopterećenu dužinu. Ako je trenutna dužina opruge manja od njene početne neopterećene dužine, opruga pokušava da udalji blok od nepomičnog zida i da tako vrati svoju neopterećenu dužinu



Slika 3.8. Elastična sila u istegnutoj (lijevo) i sabijenoj (desno) opruzi

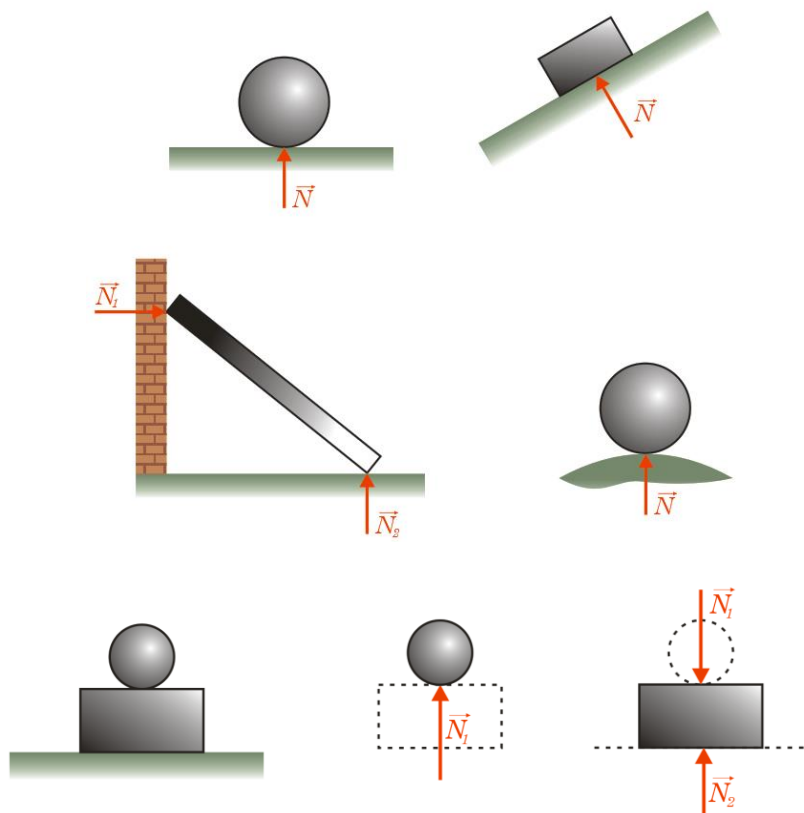
Sila u opruzi je proporcionalna razlici između trenutne i početne dužine opruge u neopterećenom stanju. Faktor proporcionalnosti se označava sa k i naziva se *koeficijent krutosti opruge*.

$$F_{op} = -kx$$

Tvrđnju da je deformacija tijela (opruge) proporcionalna elastičnoj sili je definisao Huk (*Robert Hooke*), te se prema tome ova tvrdnja naziva Hukov zakon.

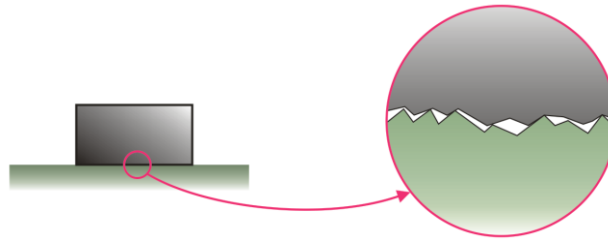
3.3.3. Kontaktne sile

Prilikom kontakta dva objekta, prema NZ3 oba objekta djeluju jedno na drugo jednakim silama. Komponenta kontaktne sile koja spriječava da jedan objekat prodre u drugi objekat naziva se normalna sila. Naziv „normalna sila“ dobila je zbog svog pravca vektora koji leži na normalni u odnosu na dodirnu površinu između dva objekta. Ova sila se još često naziva i „reakcija podloge u dodirnoj tački“. Za označavanje ove sile najčešće se u literaturi može naći veliko slovo N .



Slika 3.9. Normalna sila na kontaktnoj površini dva objekta

Druga komponenta kontaktne sile je sila trenja. Sila trenja nastaje kada se dva objekta pokušavaju kretati u suprotnim smjerovima pri dodiru dvije površine. Površina tijela, ma koliko ona se činila glatkom, nikada ne može biti idealno glatka. Zbog tih mikroneravnina na površinama tijela koja klize jedno po drugom dolazi do pojave sile trenja.



Slika 3.10. Neravnine na dodirnim površinama

Kako ispupčenja i udubljenja jedne površine se uklapaju u ispupčenja i udubljenja druge površine, javlja se otpor klizanju jedne površine po drugoj. Pored toga, količina trenja zavisi i od čistoće površine, hemijskog sastava dodirnih površina i td. Zanimljiva je činjenica da trenje neće zavistiti od veličine dodirne površine kojom tijelo klizi po hrapavoj podlozi. Karakteristike trenja određuju eksperimentalno, jer zbog njegove kompleksnosti je zaista teško doći do tačnih računskih rezultata karakteristika trenja. U nastavku će biti razmotrena dva slučaja trenja.

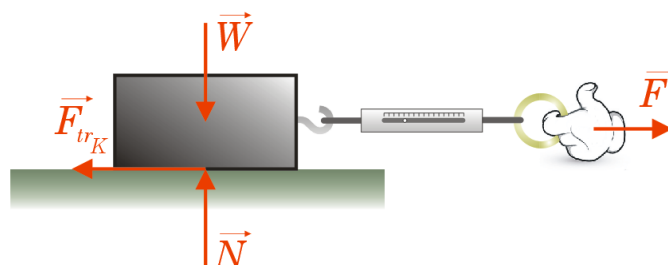
Ukoliko se dva tijela koja se dodiruju hrapavim površinama kreću jedno u odnosu na drugo, trenje koje se javlja u tim dodirnim površinama se naziva *kinetičko trenje* ili *trenje klizanja*. Sila trenja klizanja se može odrediti prema formuli

$$(F_{tr})_K = \mu_K \cdot N$$

gdje je $(F_{tr})_K$ sila kinetičkog trenja, μ_K je koeficijent kinetičkog trenja i N normalna sila.

Koeficijent trenja je bezdimenzionalan, pozitivan broj veći od nula i manji ili jednak broju 1. U rijetkim specijalnim slučajevima ovaj koeficijent trenja može biti čak i veći od 1. Koeficijent trenja je karakteristika koja definiše količinu trenja i određuje se eksperimentalno.

Kinetički koeficijent trenja neke površine se određuje tako što se blok poznate mase po toj površini postavljenom horizontalno vuče konstantnom brzinom. U tom slučaju se sila trenja može mjeriti ako dinamometar (davač sile) stavimo tako da njime vučemo blok. Sila koju očitamo na dinamometru predstavlja silu kinetičkog trenja. U tom slučaju, koeficijent kinetičkog trenja će biti jednak odnosu izmjerene sile kinetičkog trenja i normalne sile koja će u ovom slučaju biti jednaka težini bloka.



Slika 3.11. Eksperimentalno određivanje koeficijenta kinetičkog trenja

Kombinacije različitih materijala imaju različite koeficijente trenja, koji se ne mogu izračunati bez eksperimentalnog mjerenja. U tabeli su dati primjeri koeficijenata trenja između različitih materijala

Tabela 3.1. Koeficijenti trenja između različitih materijala

| Various Coefficients of Friction | | | |
|----------------------------------|-----------------------|-----------|-----------|
| Materials | Interface Condition | Kinetic | Static |
| Steel on Steel | Dry | 0.42-0.57 | 0.74-0.78 |
| Steel on Steel | Lubricated (Graphite) | 0.058 | |
| Aluminum on Aluminum | Dry | 1.4 | 1.05 |
| Glass on Glass | Dry | 0.4 | 0.94 |
| Wood on Wood | Dry | | 0.35 |
| Wood on Wood | Wet | | 0.2 |
| Wood on Brick | Dry | | 0.6 |
| Wood on Leather | Dry | | 0.35 |
| Ice on Ice | Clean, 0° C | 0.02 | 0.1 |
| Ice on Ice | Clean, -12° C | 0.035 | 0.3 |
| Ice on Ice | Clean, -80° C | 0.09 | 0.5 |

U slučaju kada se dva objekta koja se dodiruju ne kreću relativno jedan u odnosu na drugi, u dodirnim površinama se javlja pojava zvana *statičko trenje* ili *trenje mirovanja*. Ova pojava se javlja u slučaju kada neka vanjska sila pokuša da promjeni stanje relativnog mirovanja između dva objekta i dovede jedan od tih objekata u stanje klizanja. U tom slučaju, statičko trenje se odupire klizanju.

U slučaju kada se samo statičko trenje odupire relativnom kretanju dva objekta, povećavanjem vanjskih sila koje djeluju na te objekte će u jednom trenutku doći do kretanja. U trenutku kada dođe do kretanja, kinetičko trenje zamjenjuje statičko trenje. Prelazak iz jednog oblika trenja u drugi se dešava kada statičko trenje dostigne svoju maksimalnu vrijednost. Granična vrijednost sile statičkog trenja je također proporcionalna normalnoj sili sa koeficijentom koji se naziva *koeficijent statičkog trenja*.

$$(F_{tr})_S^{gr.} = \mu_s N$$

Koeficijent statičkog trenja se određuje eksperimentalno i uglavnom je veći od koeficijenta kinetičkog trenja. No, to nije slučaj sa svim kombinacijama materijala. U već navedenoj tabeli možete vidjeti da aluminijum po aluminiju ima veći koeficijent kinetičkog nego statičkog trenja.

Generalno, veličina statičkog trenja zavisi od vanjskih sila i manja je ili je jednaka graničnoj sili statičkog trenja

$$0 \leq (F_{tr})_S \leq (F_{tr})_S^{gr.}$$

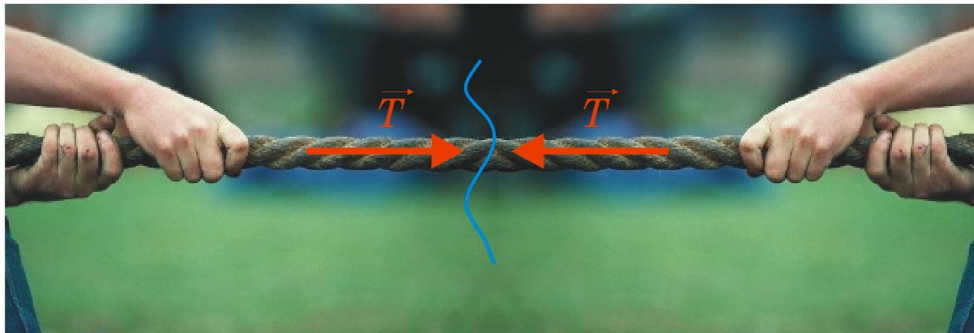
Ako na objekte ne djeluju vanjske sile u pravcima paralelnim sa dodirnim površinama, onda u tom slučaju sila statičkog trenja jednaka je 0.

Koeficijent statičkog trenja se također određuje eksperimentalno sličnom metodom kao koeficijent kinetičkog trenja. Postavka eksperimenta je jednaka za određivanje oba

koeficijenta. Jedina razilka je u tome što se koeficijent statičkog trenja određuje tako što se postepeno povećava sila kojom se vuče dinamometar. Maksimalna sila koju pokaže dinamometar prije nego dođe do kretanja je sila statičkog trenja. Na osnovu nje je moguće odrediti koeficijent statičkog trenja kao odnos izmjerene sile na dinamometru i poznate težine bloka.

3.3.4. Sile zatezanja

Užad, žice, sajle i slične fleksibilne komponente mehaničkih sistema su čest prenosilac sile. Obzirom da ove komponente imaju zanemarljivu dimenziju prečnika u odnosu na svoju dužinu, ne mogu biti pritisnute po dužini nekom silom i istovremeno tu silu prenijeti. Ove komponente su najčešći prenosilac *zatežuće sile*. Kada se razmatraju sile zatezanja koju prenose užad, sajle ili žice, za te objekte se smatra da imaju zanemarljivu masu i da su nerastegljivi (ne mogu mijenjati svoju dužinu pri opterećenju). Prilikom prenošenja sile, uže može prenijeti samo silo na zatezanje. Ako je uže zategnuto između dvije tačke i ukoliko se na tom užetu napravi fiktivni presjek, sa obe strane presjeka će uže biti zategnuto istim silama koje će ležati duž užeta.



Slika 3.12. Sila zatezanja u užetu

3.3.5. Primjenjene sile

Primjenjenom silom se naziva sila kojom osoba (ili životinja) djeluje na objekat. Kao primjeri ove sile se mogu navesti sila kojom osoba gura sanduk, životinja vuče plug ili slično. Iako se ova sila može razložiti na dvije komponente (normalnu silu i silu trenja), najčešće se izbjegava razlaganje ove sile na takve komponente te se primjenjena sila gleda kao jedinstven vektor.

3.3.6. Sila otpora kretanju objekta kroz fluid

Za vrijeme kretanja tijela kroz fluid brzinom \vec{v} , tom kretanju se suprotstavlja sila otpora fluida koja se može označiti sa \vec{F}_{otp} . Najjednostavniji primjer su kada se krećete po plićaku i sila koja otežava kretanje kroz vodu je upravo sila otpora fluida. Drugi primjer je kada se vozite u automobilu i izbacite ruku kroz prozor. Sila koja gura vašu ruku suprotno kretanju automobila je sila otpora zraka.

Ova sila ima dvije osnovne karakteristike:

- Slično sili trenja, sila otpora fluida je usmjerena suprotno kretanju (suprotno vektoru brzine).
- Intenzitet sile otpora fluida zavisi od brzine kretanja objekta kroz fluid. Povećanjem brzine kretanja povećava se i intenzitet sile otpora.

Za male objekte ili za objekte koji se kreću malim brzinama, sila otpora fluida se mijenja linearno sa brzinom kretanja. Ova sila se može zapisati u obliku slijedeće relacije

$$\vec{F}_{otp} = -b\vec{v}$$

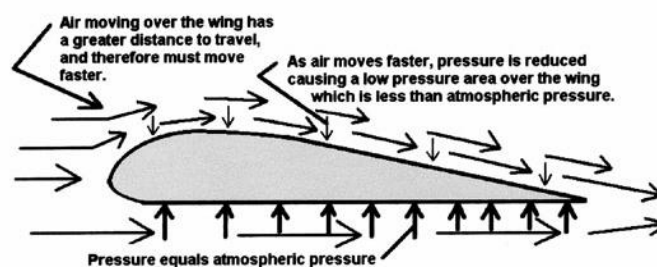
gdje je b koeficijent linearnog otpora fluida. Ovaj koeficijent zavisi od oblika objekta koji se kreće kroz fluid (geometrijskog oblika i veličine), te karakteristika fluida kroz koji se kreće (viskoznosti fluida).

Pri većim brzinama i kod objekata većih dimenzija, promjena sile otpora fluida se značajnije mijenja u odnosu na silu otpora pri malim brzinama i manjim objektima. Ova sila se mijenja sa kvadratom brzine

$$F_{otp} = -cv^2$$

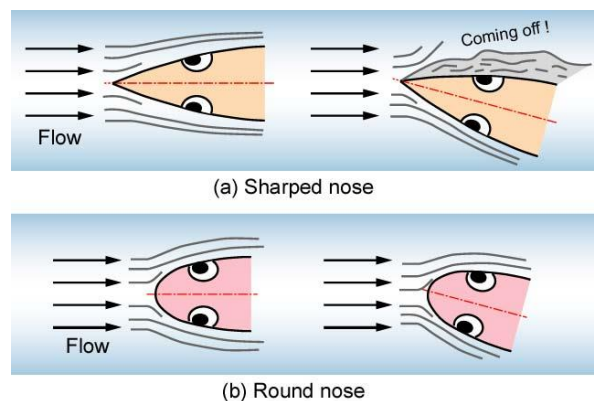
gdje je c koeficijent kvadratnog otpora fluida, koji također zavisi od oblika objekta i karakteristika fluida. Zbog navedenih karakteristika sile otpora fluida, veliki značaj ima dizajniranje mehaničkih dijelova koji će imati što manji otpor fluida prilikom njihovog kretanja (krilo aviona, oblik trupa aviona, oblik trupa broda, oblik automobila, oblik projektila, i td.). Poznato je da najmanji otpor kretanju kroz zrak ima oblik kapljice, te takvom obliku teže i profil krila aviona ili bočni profil vozila za utrke.

Zbog nešto veće gornje površine profila krila, brzina kojom zrak opstrujava gornju površinu je veći nego brzina kojom zrak opstrujava donju površinu profila krila, te se zbog toga javlja i *sila uzgona*, odnosno sila koja gura krilo aviona prema gore.



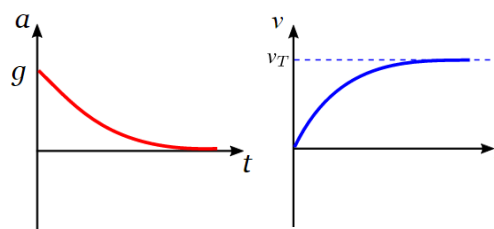
Slika 3.13. Sila uzgona

Najmanji otpor kretanju kroz vodu također ima sličan oblik (oblik ribe), te se za kretanje kroz vodu dizajniraju takvi oblici vozila koji imaju „ribolik“ izgled (kajak, dno jedrilice, podmornica).



Slika 3.14. Različiti hidrodinamički oblici

Sila otpora trenja fluida je možda i najuočljivija u vidu otpora zraka kretanju objekata blizu Zemljine površine. Kosi hitac analiziran ranije u razmatranje nije uzimao otpor vazduha. Analiza kosog hica uz razmatranje otpora zraka postaje značajno složeniji zadatak nego je to analiza kosog hica bez otpora zraka. Obzirom da analizirani slučajevi kosog hica su ili sa malim brzinama ili sa značajnim aerodinamičkim karakteristikama, otpor zraka je moguće zanemariti. Međutim, značajan uticaj otpora vazduha je na objekte koji imaju veće dimenzije ili takvu geometriju da stvara veliki otpor vazduha. Ukoliko bi skakač sa padobranom skočio sa beskonačno velike visine i u zraku zadržavao uvijek isti položaj, zanemarujući otpor vazduha teoretski bi mogao dostići „beskonačnu“ vrijednost brzine. Obzirom da zrak stvar otpor koji zavisi od brzine, povećanjem brzine leta se povećava i otpor zraka koji tu brzinu pokušava da smanji. Nakon dovoljno velikog intervala vremena, brzina kojom pada skakač teži konstantnoj vrijednosti brzine. Ta konstantna vrijednost brzine kojoj teži brzina leta sa silom otpora fluida naziva se *konačna brzina*. Kada je konačna brzina dostignuta, tada konačno ubrzanje koje ima objekat koji pada teži nuli.



Slika 3.15. Graf ubrzanja i brzine prilikom slobodnog pada uz otpor zraka

Kada objekat koji pada sa velike visine dostigne konačnu brzinu, na njega djeluju samo dvije sile: težina objekta i sila otpora zraka. Obzirom da u tom trenutku je ubrzanje je jednako 0, konačna brzina objekta se može dobiti kao

$$\sum F = mg - bv_{kon.} = 0$$

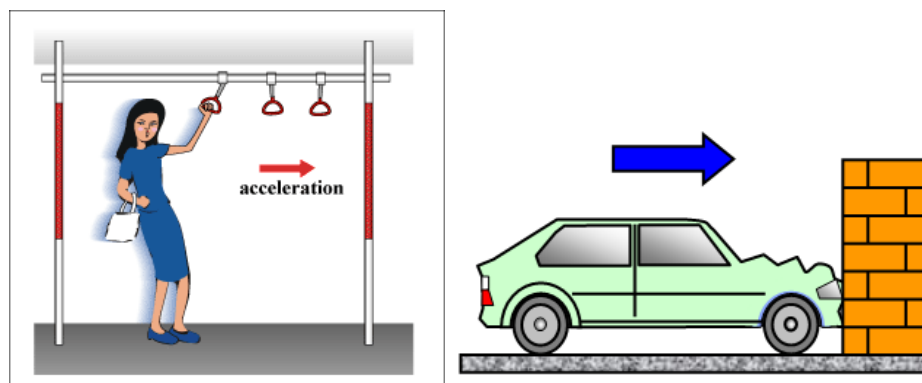
$$v_{kon.} = \frac{mg}{b}$$

3.3.7. Inercijalne sile

Posmatranjem NZ2 se primjećuje da rezultantu sila čini više sila koje su jednake proizvodu mase i ubrzanja objekta.

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Pošto lijevu stranu jednakosti čine sile, onda i lijevu stranu možemo okarakterisati kao „silu“. Vektor $m\vec{a}$ se često naziva *inercijalnom silom*, koja ima smjer suprotan smjeru vektora ubrzanja \vec{a} . Ovu inercijalnu silu je najjednostavnije predočiti kao silu koja unazad vuče osobu dok stoji u autobusu koji ubrzava, ili sila koja nas vuče suvozača naprijed dok je u automobilu koji naglo zakoči.



Slika 3.16. Inercijalne sile prilikom ubrzanja i usporenja vozila

Dodavanjem inercijalne sile na desnu stranu jednakosti umjesto $m\vec{a}$ dobija se jednačina dinamičke ravnoteže. Ovaj princip da se zamjenom člana $m\vec{a}$ inercijskom silom u drugom Njutnovom zakonu dobije dinamička ravnoteža sila naziva se *D'Alembertov princip*, po francuskom matematičaru koji je prvi uočio navedenu smjenu.

Druga inercijalna sila koja se može javiti je *centrifugalna sila*. Ona je također prividna sila koja se javlja kod krivolinijskog kretanja. Pošto se kod krivolinijskog kretanja javlja normalno ubrzanje usmjereno prema trenutnom centru rotacije, onda se centrifugalna sila javlja na istom pravcu kao normalno ubrzanje, samo sa suprotnim smjerom. Centrifugalnu silu je jednostavno osjetiti prilikom kretanja automobila po krivolinijskom putu. Ukoliko putnici u automobilu ulaze u desni zavoj, centrifugalna sila ih gura u lijevo. Drugi jednostavan primjer je centrifugalne sile je kod rotacije ringišpila, gdje centrifugalna sila vuče sjedišta sa osobama van kruga kojeg opisuje ringišpil. Brojni su i drugi primjeri prisustva ove sile, kao što je primjer kanta pune vode koju okrećete u vertikalnoj ravni, gdje zbog pojave centrifugalne sile se voda neće prosuti čak i u trenutku kada je kanda okrenuta naopako.



Slika 3.17. Primjeri centrifugalne sile kao inercijalne sile